ĐỀ HỌC SINH GIỎI KHỐI 8 - QUẬN 12 – VÒNG 1 (2015-2016)

(Thi ngày: thứ 6 ngày 31/07/2015)

Thời gian: 120 Phút

Bài 1: (4 điểm) Phân tích đa thức ra nhân tử:

a) x^5+x+1

$=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$

b) $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

$=x^4+1+6x^3-6x+7x^2=\left(x^2-1\right)^2+6x\left(x^2-1\right)+9x^2 \;=\left(x^2-1+3x\right)^2$

Bài 2: (3 điểm) Chứng minh rằng nếu $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a=b=c\end{array}\right.$

Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow \left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)+c^3-3abc=0$

$\Leftrightarrow \left(a+b\right)^3+c^3-3ab\left(a+b+c\right)=0 \Leftrightarrow \left(a+b+c\right)^3-3c\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)-3ab\left(a+b+c\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left[\left(a+b+c\right)^2-3c\left(a+b\right)-3ab\right]=0 \Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ \left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a=b=c\end{array}\right.$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: (3 điểm) Cho a, b, c > 0 và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9 \Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\left(\text{vì } a+b+c=1\right)$

$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\ge 9 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 6$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương, ta được:

$\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2\\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2\\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\end{cases}$ CVTV ta được: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 6$

Vậy BĐT đã được chứng minh.

Bài 4: (4 điểm) Giải phương trình và bất phương trình:

a) $\frac{3}{1-4x}+\frac{8+6x}{16x^2-1}=\frac{2}{4x+1}$ (1)

Điều kiện: $x\ne \pm\frac{1}{4}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{-3}{4x-1} + \dfrac{8+6x}{(4x-1)(4x+1)} = \dfrac{2}{4x+1} \Leftrightarrow \dfrac{-3(4x+1)+8+6x-2(4x-1)}{(4x-1)(4x+1)} = 0$

$\Rightarrow -12x-3+8+6x-8x+2=0 \Leftrightarrow 14x=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}(\text{nhận})$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

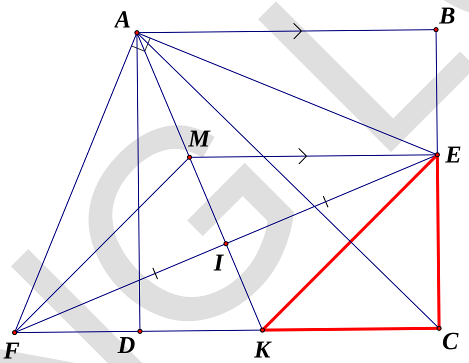
b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x} \le 2 \ (2)$

Điều kiện: $x \ne 0; x \ne -1$

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x^2+2x+1-2x^2-2x}{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow x(x+1)<0 \Leftrightarrow -1<x<0$

Vậy $S=\{x \in R / -1<x<0\}$

Bài 5: (3 điểm) Cho hình vuông ABCD, lấy E thuộc BC vẽ đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt CD tại F. Kẻ đường trung tuyến AI của ΔAEF cắt CD tại K. Qua E vẽ đường thẳng song song với AB cắt AI tại M.



a) Chứng minh: tứ giác EMFK là hình thoi.

$\Delta ABE = \Delta ADF\left(\hat{B}=\hat{D}=90^0; \widehat{BAE}=\widehat{DAF}; AB=AD\right) \Rightarrow AE=AF \Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A

$\Rightarrow$ AI là đường cao (AI là đường trung tuyến) $\Rightarrow AI \perp EF$ tại I.

$\Delta MIE = \Delta KIF\left(\widehat{MEI}=\widehat{IFK}; \hat{I}=\hat{I}; IE=IF\right) \Rightarrow ME=FK$ mà ME // FK (// AB)

Nên tứ giác EMFK là hình bình hành (tứ giác có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau)

Lại có: $MK \perp EF \Rightarrow$ hbh EMFK là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc)

b) Chứng minh: $AF^2 = FK.FC$

Chứng minh được: $AF^2 = FI.FE = FK.FC$

c) Chứng minh: khi E thay đổi trên BC thì P_{ECK} không đổi.

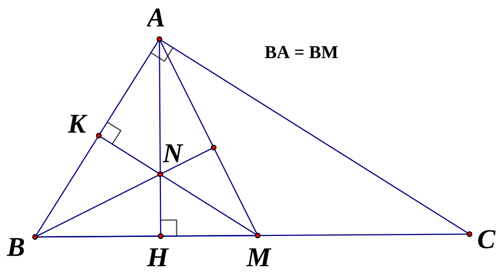
AK là đường cao của ΔAEF vuông cân tại A $\Rightarrow$ AK là đường trung trực của EF

$\Rightarrow \Delta AFK = \Delta AEK(c-c-c) \Rightarrow FK=EK \Rightarrow FD+DK=EK \Rightarrow BE+DK=EK$

$\Rightarrow BE+DK=EK \Rightarrow BE+EC+DK+KC=EK+EC+KC$

$\Rightarrow P_{EKC} = CD + BC$: Không đổi vì B, C, D cố định.

Bài 6: (3 điểm) Cho ΔABC vuông tại A có AB < AC có đường cao AH.



a) Chứng minh: $AH^2 = BH.HC$

$\Delta ABH \backsim \Delta CAH(g-g) \Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH.HC$

b) Trên BC lấy điểm M sao cho BM = AB. Kẻ $MK \perp AB$ cắt AH tại N. Chứng minh: BN là tia phân giác, từ đó suy ra $HM.BM = BH.MC$.

Ta có: $AB = BM \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B. Mà BN là đường cao (N là trực tâm của ΔABM)
Nên BN là đường phân giác.

Ta có: MK // AC $\Rightarrow \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{BM}{MC}(\text{Thales})$ (1)

$\Delta BAH \backsim \Delta BMK(g-g) \Rightarrow \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{BH}{BK}$. Mà $AB = BM(gt)$. $\dfrac{BH}{BK} = 1 \Rightarrow BH = BK$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BM} = \dfrac{BK}{BA} \Rightarrow \dfrac{BH}{HM} = \dfrac{BK}{AK}$. Mà $\dfrac{BK}{AK} = \dfrac{BM}{MC}$ (KM // AC). Nên $\dfrac{BH}{HM} = \dfrac{BM}{MC} \Rightarrow HM.BM = BH.MC$

❀ ❀ **HẾT** ❀ ❀